TP de mécanique des fluides, considérations théoriques

Emmanuel Giner, Muammar El Khatib

Lab. Chimie et Physique Quantiques, CNRS-Université de Toulouse, France.

I. INTRODUCTION

L'idée de cette partie théorique est de montrer comment on peut relier le débit théorique dans une canalisation aux pressions qui règnent en différents endroits de la canalisation. Ces pressions sont accessibles expérimentalement via des mesures de piézométries, et on peut donc théoriquement mesurer le débit dans une canalisation sans jamais à avoir à mesurer de manière effective son débit.

II. EQUATIONS FONDAMENTALES

On considère ici une canalisation supposée à l'horizontale sur toute sa longueur. On peut associer en tout point de la canalisation un certain débit au fluide, ainsi qu'une certaine pression et vitesse. Pour relier ces trois quantités, on se doit d'émettre certaines hypothèses sur la nature du fluide. On supposera ici que l'énergie du fluide se conserve (equation de Bernouilli), ansi que sa masse. Ces deux hypothèses peuvent être discutées suivant les situations physiques. Le fait que l'énergie du fluide se conserve implique qu'il n'y a aucuns frottements d'aucunes sortes tout au long du parcours du fluide dans la canalisation. En effet, tout frottement ou friction impliquerait une perte d'énergie du fluide, énergie qui serait cédée au milieu extérieur (la canalisation en l'occurence) sous forme de chaleur. Une autre forme de perte peut aussi avoir lieu si le fluide se met à être turbulent (à faire de petits tourbillons) : il peut se réchauffer, et encore une fois, toute énergie transformée sous forme thermique est définitivement perdue pour le fluide.

L'hypothèse de non frottement est très discutable sur de longs parcours de fluides, mais dans le cas qui va nous intéresser, à savoir deux points assez proches l'un de l'autre, cette hypothèse reste convenable. Pour ce qui est de la conservation de la masse, à partir du moment où les canalisation sont étanches et où on ne rajoute pas spontanément du fluide, cette hypothèse peut être acceptée.

Consdérons deux points A et B comme sur votre cahier de TP. En A la section pour le fluide S_A est plus grande que celle en B notée S_B. Le fluide en A possède une certaine vitesse v_A, et pression P_A, et idem en B (v_B, P_B). Dire que la masse se conserve entre A et B revient à écrire mathématiquement (cf cours) :

$$\rho_A v_A S_A = \rho_B v_B S_B$$

Cette équation est encore appelée équation de continuité. Si on suppose que notre fluide est imcompressible (ce qui pour les pressions envisagées est honnête), alors sa masse volumique est constante en tout point de la canalisation. De fait, $\rho_A = \rho_B = \rho$ et de fait la conservation de la masse se réduit alors à :

$$v_A S_A = v_B S_B$$

ou encore en remarquant que le débit à travers une surface point est le produit de la vitesse du fluide par cette même surface :

$$Q_A = Q_B$$

Pour des fluides incompressibles nous arrivons alors à une équation fondamentale : le débit se conserve. Cette relation est bien utile puisqu'elle nous permet de relier les vitesses en A et B avec leurs section correspondantes.
Si on écrit maintenant la conservation de l'énergie du fluide entre A et B on a :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

où on a noté z_A et z_B les hauteurs respectives des points A et B. Les deux premiers termes sont l'énergie potentielle de pression, l'énergie potentielle de pesanteur, et le troisième terme est l'énergie cinétique du fluide. Ici, on considère deux points A et B à la même hauteur ($z_A = z_B$), les contributions de l'énergie potentielle de pesanteur sont donc les mêmes en A et B, on peut donc les simplifier :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

ou encore :

$$P_A - P_B + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

où on a fait apparaître la différence de pression entre A et B. A partir de ces équations, quelques remarques s'imposent. La première est que si le débit se conserve, alors on peut écrire que :

$$v_B = v_A \frac{S_A}{S_B}$$

comme $S_A > S_B$, on a alors :

$$v_B > v_A$$

ce qui indique donc que lorsqu'un fluide passe dans une canalisation réduite, la vitesse au niveau de la section plus petite augmente. Qu'en est-il de la pression au niveau de ce même rétrécissement ? On peut réécrire l'équation de la conservation de l'énergie mécanique comme :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

Or on vient de voir que $v_B > v_A$, ce qui implique que $v_B^2 - v_A^2 > 0$, soit encore que :

$$P_A > P_B$$

Autre constation (quelque peu contre intuitive), lorsque qu'un fluide passe dans une canalisation plus petite, sa vitesse augmente mais sa pression diminue. Ceci peut se comprendre sous forme de transfert d'énergie : si un fluide gagne en vitesse, il gagne en énergie cinétique. L'énergie totale étant constante, il doit perdre en énergie potentielle qui est constituée de l'énergie potentielle de pesanteur (qui n'intervient pas ici du fait qu'on soit à l'horizontale), et de l'énergie de pression. Reste donc au fluide la seule solution de minimiser son énergie potentielle de pression.

Maintenant, comment mesurer la pression d'un fluide ? Si on plante une paille ouverte à l'air libre dans la canalisation, l'eau va monter d'une certaine hauteur dans cette paille. Ce qui fera monter l'eau dans la paille (et donc combattre l'effet de la gravité) c'est précisément la pression qui règne en ce point du fluide. Cette hauteur de fluide déplacé est appellée la hauteur piézométrique. On peut la relier à la pression du fluide, et de fait mesurer cette hauteur de fluide déplacé revient à mesurer la pression dans la canalisation. Ecrivons tout ça mathématiquement. Lorsque le fluide est monté d'une hauteur h dans la paille, le fluide dans le haut de la paille est à la même pression P_0 que l'air ambiant puisqu'il s'est stabilisé. De plus à la base de la paille, le fluide est à la pression P. Si on appelle 1 le point dans le fluide au bas de la paille, et 2 le point en haut de la paille, alors la pression en 1 est égale à la pression en 2 à laquelle s'ajoute la pression dûe au poids de la colone de fluide de hauteur h :

$$P_1 = P_2 + \rho g h = P_0 + \rho g h$$

Donc la hauteur de fluide déplacé est directement une mesure de la pression dans le fluide au bas de la paille !
Si on applique ce principe pour les deux points A et B qu'on s'était donné et qu'on place une paille en chacun des points dans lequel on observe une hauteur de fluide déplacé respectivement de h_A et h_B, alors on peut directement exprimer la différence de pression entre A et B en fonction de la différence de hauteur de fluide déplacé :

$$P_A = P_0 + \rho g h_A$$

$$P_B = P_0 + \rho g h_B$$

$$P_A - P_B = \rho g (h_A - h_B) = \rho g \Delta h$$

Si on injecte ce dernier résultat dans l'équation de la conservation de l'énergie mécanique on a :

$$\rho g \Delta h = \frac{1}{2}\rho \left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

comme on sait que le débit se conserve entre A et B pour un fluide incompressible on a alors :

$$Q_A = Q_B = Q = v_A S_A = v_B S_B$$

$$v_B = v_A \frac{S_A}{S_B}$$

soit encore :

$$2g\Delta h = \left(v_A^2 \frac{S_A^2}{S_B^2} - v_A^2\right) = v_A^2 \left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)$$

$$2g\Delta h = v_A^2 \frac{S_A^2 - S_B^2}{S_B^2}$$

$$v_A^2 = 2g\Delta h \frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2}$$

$$v_A^2 S_A^2 = Q^2 = 2g\Delta h \frac{S_B^2 S_A^2}{S_A^2 - S_B^2}$$

ou enfin :

$$Q = \sqrt{\Delta h}\sqrt{\frac{2g}{S_A^2 - S_B^2}} S_B S_A$$

$$Q = K\sqrt{\Delta h}$$

On arrive donc à déterminer le débit théorique uniquement en fonction de la mesure de Δh et de la connaissance de S_A et S_B.

Dans le TP il vous sera donc demander de vérifier que la débit que vous allez effectivement mesurer croît bien comme la racine carré de la différence de hauteur piézométrique que vous allez mesurer. Le coeficient de proportionalité (ici K) entre ce que vous allez mesurer et le débit théorique vous permettra alors de remonter à une section efficace en B.